# Die conforme Abbildung des hyperbolischen Paraboloids auf einer Ebene.

---

Inaugural-Dissertation
nebst beigefügten Thesen
der
**hohen philosophischen Facultät der Universität Greifswald**
zur
**Erlangung der philosophischen Doctorwürde**
vorgelegt
und am
30. Juli 1887, 11 Uhr Vorm.
öffentlich vertheidigt
von

**Walter Koch**
aus Lauenburg in Pommern.

---

Opponenten:
Herr **K. Löscher,** Dr. phil.
- **C. la Roche,** cand. phil.
- **J. Edler,** cand. phil.

---

Greifswald.
Druck von F. W. Kunike.
1887.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Minnigerode

zu Greifswald

aus Dankbarkeit gewidmet

vom

**Verfasser.**

§ 1.

## Die confocalen Flächen zweiter Ordnung.

Man weiss, dass es Jacobi gelungen ist, eine Reihe von Problemen, welche das Ellipsoid betreffen, wie die Complanation und Kubatur desselben, seine conforme Abbildung auf einer Ebene, die Berechnung der geodätischen Linien und des Potentials u. s. w., zu lösen durch die Anwendung der sogenannten elliptischen Coordinaten[1]), und aus der Art und Weise ihrer Einführung ersieht man unmittelbar, dass jene Aufgaben sich in gleicher Weise für die Hyperboloide lösen lassen. Um dieselben auch für die Paraboloide lösen, d. h. die hierbei auftretenden Differentialgleichungen integrieren zu können, wird es nötig sein, den Begriff der confocalen Flächen 2. O., von denen man ja bei der Definition der elliptischen Coordinaten ausgeht, derart zu erweitern, dass er auch für die nichtcentrischen Flächen giltig ist; alsdann wird man in der Lage sein, aus demselben gleichzeitig sowohl den centrischen Flächen entsprechend das elliptische Coordinatensystem als auch den nichtcentrischen Flächen entsprechend ein ganz analoges „parabolisches Coordinatensystem" herleiten zu können, welches letztere nunmehr das Werkzeug ist, das die Lösung jener Probleme auch für die Paraboloide vermittelt.

Das Wesentliche an den elliptischen Coordinaten ist

---

1) Jacobi's ges. W. Supplbd. p. 198—237.

offenbar ihre Orthogonalität, sie bildet die Bedingung ihrer Anwendbarkeit; die Orthogonalität ist die charakteristische Eigenschaft der durch die Gleichung

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-1=0$$

mittels des variabeln Parameters λ dargestellten Flächenschaar zweiter Ordnung, welche mit dem Ellipsoid

$$2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

confocal ist. Ich will deshalb einfach ein orthogonales Flächensystem zweiter Ordnung als ein confocales definieren und zunächst den analytischen Ausdruck für dasselbe aufstellen. Es ist nun klar, dass man auf diesen Ausdruck geführt wird, wenn man auch die Differentialgleichungen für die Krümmungslinien der Paraboloide integriert, aber abgesehen von der Umständlichkeit dieses Verfahrens würde sich der innere gemeinsame Character der in dieser Weise gewonnenen elliptischen und parabolischen Coordinaten nicht so getreu auch in der äusseren analytischen Form wiederspiegeln können, als dies bei dem Verfahren von Hesse der Fall ist, welcher bereits den in Rede stehenden allgemeinen analytischen Ausdruck für die confocalen Flächen 2. O. in seiner Raumgeometrie [1]) gegeben hat. Hesse macht nämlich darauf aufmerksam, dass der innere Charakter der confocalen Flächenschaar analytisch dann hervortritt, wenn man die Gleichung derselben in Ebenencoordinaten überträgt [2])

1) 3. Aufl. p. 341.

2) Vgl. Hesse's Untersuchungen über confocale Kegelschnitte in der „Ztschr. f. Math. u. Ph.“ Bd. XIX, und über Focalcurven in seiner Raumgeometrie 24. Vorl. An diese Untersuchungen lehnt sich die nachfolgende Entwickelung im § 1 eng an.

Die Gleichung 1) lautet in den orthogonalen Ebenencoordinaten $u, v, w$:

3) $$(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1)-\lambda(u^2+v^2+w^2)=0$$

und stellt in dieser Form eine Flächenschaar dar, welche mit den beiden Flächen 2. Klasse:

4) $$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1=0$$

und

5) $$u^2+v^2+w^2=0$$

dieselben Tangentialkegel hat. Machen wir uns nun durch eine beliebige Coordinatentransformation von der speciellen Wahl des Coordinatensystems unabhängig, so geht die Gleichung 4), welche nichts weiter ist als die in Ebenencoordinaten ausgedrückte Gleichung 2), über in einen gewissen Ausdruck zweiten Grades

6) $$F(u, v, w)=0,$$

während die Gleichung 5) vollkommen ungeändert bleibt. Denn schreibt man die Gleichung einer beliebigen Ebene $u, v, w$

$$xu+yv+zw+1=0$$

in der Form

$$x\cdot\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}+y\cdot\frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}+z\cdot\frac{-w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}-\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=0,$$

so erkennt man, dass die Coefficienten von $x, y, z$ die resp. Richtungscosinus der Normalen der Ebene darstellen, während der Ausdruck

$$p=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

den Abstand der Ebene $u, v, w$ vom Coordinatenanfangspunkt bedeutet; es bleibt mithin die Grösse

$$u^2+v^2+w^2=\frac{1}{p^2}$$

bei jeder Drehung des Coordinatensystems constant. Nun ist aber wegen 5) in unserem Falle der Abstand $p = \infty$, es wird also auch noch bei jeder endlichen Parallelverschiebung des Coordinatensystems $p = \infty$ sein, so dass thatsächlich die Gleichung 5) bei jeder Coordinatentransformation ungeändert bleibt. Unsere confocale Flächenschaar 3) wird also nach der Transformation durch die Gleichung repräsentiert:

7) $$F(u, v, w) - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Lassen wir nun hierin $F(u, v, w) = 0$ einen ganz allgemeinen Ausdruck zweiten Grades bedeuten, so schliesst die Gleichung 7) auch die confocalen Paraboloide mit ein. Es lässt sich in der That zeigen, dass die durch 7) dargestellte Flächenschaar eine orthogonale ist.

Um dies zu erkennen, muss man zunächst die merkwürdigen Eigenschaften der durch Gleichung 5) dargestellten ausgezeichneten Fläche 2. Kl. studieren. Dieselbe ist, da ihre Gleichung, wenn $u, v, w$ reell sind, nur durch die Annahme

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

befriedigt wird, eine Grenzfläche 2. O., welche ganz in der unendlich fernen Ebene liegt und auf dieser einen imaginären Kegelschnitt darstellt. Um die Natur dieses Kegelschnitts festzustellen, kann man durch ihn einen Kegel legen, dessen Scheitel der Coordinatenanfangspunkt ist. Setzt man

$$\frac{u}{w} = p, \quad \frac{v}{w} = q,$$

so wird jede durch den Anfangspunkt gehende Tangentialebene der Fläche

a) $$p^2 + q^2 + 1 = 0$$

dargestellt durch die Gleichung

b) $$xp + yq + z = 0.$$

Bildet man noch die Differentialgleichung

c) $$x\,dp + y\,dq = 0,$$

so findet man bekanntlich die Gleichung des in Rede stehenden Kegels durch Elimination von $p$ und $q$ aus den drei Gleichungen a), b), c). Aus a) folgt durch Differentiation:

d) $$p\,dp + q\,dq = 0,$$

also aus c) und d)

e) $$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = t.$$

Durch diese Werte von $x$ und $y$ geht b) über in

f) $$tp^2 + tq^2 + z = 0.$$

Durch Vergleichung von a) und f) folgert man

g) $$z = t,$$

also ist wegen e)

h) $$p = \frac{x}{z}, \quad q = \frac{y}{z},$$

wodurch die Gleichung b) übergeht in

8) $$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Da diese Gleichung bei jeder Drehung des Coordinatensystems unverändert bleibt, so lässt sich der durch sie repräsentierte imaginäre Kegel 2. O. auffassen als Rotationskegel bezüglich einer jeden durch seinen Scheitel gehenden Geraden als Rotationsachse. Auf einer jeden Ebene schneidet daher der Kegel 8) einen imaginären Kreis heraus, und der auf der unendlich fernen Ebene herausgeschnittene Kreis ist eben die Grenzfläche 5), welche man bekanntlich auch auffassen kann als den „unendlich fernen imaginären Kugelkreis", durch welchen alle beliebig im Raume liegenden Kugeln hindurchgehen.

Dieser unendlich ferne imaginäre Kugelkreis hat ausser der Unveränderlichkeit seiner Gleichung bei einer Coordinaten-

transformation noch eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft.[1]) Zwei Ebenen $u_0$, $v_0$, $w_0$ und $u_1$, $v_1$, $w_1$ sind bekanntlich harmonische Polarebenen einer Fläche 2. O. 6), wenn ihre Coordinaten in der Beziehung stehen

$$u_0 \cdot \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_1} + v_0 \cdot \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v_1} + w_0 \cdot \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial w_1} = F_{01} = 0$$

oder

$$u_1 \cdot \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_0} + v_1 \cdot \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v_0} + w_1 \cdot \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial w_0} = F_{10} = 0,$$

wo $F_{01} = F_{10}$, denn es sind ja z. B. die Coefficienten von $u_0$, $v_0$, $w_0$ in der ersten Gleichung nichts weiter als die Coordinaten des Poles zu der Ebene $u_1$, $v_1$, $w_1$. Diese Bedingung wird nun für die Grenzfläche 5):

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1 = 0,$$

welche Gleichung aussagt, dass die beiden Ebenen $u_0$, $v_0$, $w_0$ und $u_1$, $v_1$, $w_1$ auf einander senkrecht stehen. Je zwei zu einander senkrechte Ebenen sind also harmonische Polarebenen des „unendlich fernen imaginären Kugelkreises", oder alle harmonischen Polarebenen dieser Grenzfläche 2. Kl. stehen zu einander senkrecht.

Die beiden Ebenen $u_0$, $v_0$, $w_0$ und $u_1$, $v_1$, $w_1$ werden nun harmonische Polarebenen einer Fläche der Schaar 7) unter der Bedingung

$$F_{01} - \lambda (u_0 u_1 + v_0 v_1 + w_0 w_1) = 0.$$

Das erste Glied dieser Gleichung verschwindet, wenn die genannten Ebenen harmonische Polarebenen sind zu der gegebenen Fläche, das zweite, wenn dieselben auf einander senkrecht stehen. Jedes Ebenenpaar, welches auf einander senkrecht steht, ist mithin ein Polarebenenpaar für die ganze Fläche, wenn dasselbe ein Polarebenenpaar für eine Fläche

1) Vgl. Hesse in Schlömilch's Journal, Bd. XIX.

der Schaar ist. Legt man daher vor einer beliebigen Geraden an die Flächen der Schaar 7) Tangentialebenenpaare, so werden die Winkel eines jeden Paares von demselben Ebenenpaar halbiert, denn letzteres ist ja ein senkrechtes harmonisches Polarebenenpaar. Wird die beliebige Gerade speciell zur Tangente an der Schnittcurve zweier Flächen, so fallen beide Tangentialebenenpaare zusammen, und wir erkennen somit, dass sich die Flächen der Schaar 7) orthogonal schneiden. Es ist also in der That die Gleichung 7) der analytische Ausdruck für die confocalen Flächen 2. O.

Da man das System der confocalen Kegelschnitte von den gemeinschaftlichen Brennpunkten aus zu definieren pflegt, so könnte auch hier die Frage gestellt werden nach demjenigen Elemente, welches dem System der confocalen Oberflächen 2. O. als allen gemeinsames zu Grunde liegt. Dieses gemeinschaftliche Element sind die Grenzflächen der confocalen Flächenschaar 7), welche man bekanntlich ihre Focalcurven nennt.[1]) Zu ihnen gehört die näher untersuchte Grenzfläche 5) selber, da sie dem Parameter $\lambda = \infty$ entspricht. Man kann daher die confocalen Flächen 2. O. definieren als diejenige Flächenschaar, welche dieselben Focalcurven hat. Legt man von einer beliebigen Geraden Tangentialebenenpaare an eine gegebene Fläche 2. O. und eine ihrer Focalcurven, so werden nach dem Früheren die Winkel beider Paare durch dasselbe Ebenenpaar halbiert; desgleichen bildet das von einer beliebigen Tangente der Fläche 2. O. an eine Focalcurve gelegte Tangentialebenenpaar gleiche Winkel mit der Tangentialebene der Fläche, ein Satz, der demjenigen über die Brennpunkte der Kegelschnitte völlig analog ist.

---

[1]) Vgl. Hesse, Raumgeometrie 24. Vorl.

Haben wir bei Einführung homogener Coordination $u_1 u_2 u_3 u_4$

$$F(u, v, w) = \Sigma \alpha_{ik} u_i u_k,$$

worin

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad \text{und} \quad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

so sind die Focalcurven der confocalen Schaar bestimmt durch die Wurzeln $\lambda$ der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

es giebt also abgesehen vom unendlich fernen imaginären Kugelkreis noch drei Focalcurven der Fläche 2. O. Ist $\alpha_{44} \lesseqgtr 0$, d. h. die Fläche eine centrische, so kann man sich dieselbe bereits auf den Mittelpunkt bezogen denken, indem man $\alpha_{14} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = 0$ setzt; alsdann geht die obige Determinante über in:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung, welche aussagt, dass die Bestimmung der Grenzflächen mit dem Hauptachsenproblem der centrischen Flächen genau zusammenfällt; in jeder Hauptebene liegt daher eine Focalcurve.

Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{oder} \quad F(u, v, w) = 0$$

lässt sich, wenn man den Fall ausschliesst, dass die Hesse'sche Determinante verschwindet (Kegel oder Grenzfläche), je nachdem eine centrische oder eine nichtcentrische Fläche zu Grunde liegt, stets auf eine der beiden Formen reducieren:

9) $$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0 \qquad Au^2+Bv^2+Cw^2-1=0$$

oder

10) $$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-2z=0 \qquad au^2+bv^2-2w=0,$$

worin man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen kann, dass

$$A \geqq B \geqq C$$

und

$$a \geqq b$$

ist. Die rechten Gleichungen sind genau die reciproken Functionen der linken. Die mit den Flächen 9) und 10) confocalen Flächenschaaren sind resp. dargestellt durch die Gleichungen:

11) $$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}-1=0$$

12) $$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}-2z+\lambda=0.$$

Die Gleichungen für die Focalcurven der centrischen Flächenschaar 11) lauten in Punktcoordinaten übertragen:

$$\frac{y^2}{A-B}+\frac{z^2}{A-C}+1=0 \qquad x=0$$

13) $$\frac{z^2}{B-C}+\frac{x^2}{B-A}+1=0 \qquad y=0$$

$$\frac{x^2}{C-A}+\frac{y^2}{C-B}+1=0 \qquad z=0$$

Von ihnen sind immer zwei reell, und eine jede bestimmt zugleich die übrigen. Für die Focalcurven der paraboloidischen Schaar 12) erhält man

$$\lambda=\infty, \quad \lambda=a, \quad \lambda=b;$$

also ist der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis für alle beliebig im Raume gelegenen Paraboloide eine doppelte Focalcurve; die Gleichungen der beiden endlichen Focalcurven sind

14)
$$\frac{y^2}{b-a} - 2z + a = 0 \qquad x = 0$$
$$\frac{x^2}{a-b} - 2z + b = 0 \qquad y = 0,$$

zwei entgegengesetzt liegende Parabeln, deren gemeinschaftliche Hauptsache die $z$-Achse ist, und von denen die einc in der $yz$-, die andere in der $zx$-Ebene verläuft.

Ebenso wie man die Gleichung 11) zum Ausgangspunkt für die elliptischen Coordinaten genommen hat, kann man bei der Einführung der parabolischen Coordinaten von der Gleichung 12) ausgehen. Es ist somit der innere Zusammenhang zwischen den elliptischen und den parabolischen Coordinaten vollkommen klargelegt.[1])

§ 2.

## Die parabolischen Coordinaten.

Will man, wie es Jacobi[2]) bei der Behandlung der elliptischen Coordinaten gethan hat, auch bei der Einführung der parabolischen Coordinaten von einer mehrfachen Mannigfaltigkeit ausgehen, so hat man unter Zugrundelegung von $n$ unabhängigen Variabeln die Gleichung anzusetzen:

15)
$$\sum_1^n i \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} + 2z - \lambda = 0$$

Setzt man voraus, dass

16)
$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n$$

---

1) Wie mir erst nach Beendigung dieser Arbeit mitgeteilt worden ist, sind diese „parabolischen Coordinaten" schon erwähnt von Böklen, Analytische Geometrie des Raumes, Stuttgart 1861, p. 177 ff.

2) „Vorl. üb. Dyn." 26. Vorl. Die im § 2 gegebene Behandlung der parabolischen Coordinaten lehnt sich an Jacobi an, ist jedoch ein wenig vereinfacht.

und bildet die Ausdrücke

17) $$f(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \ldots (\lambda - a_n)$$

und

18) $$F(\lambda) = f(\lambda)\left[\sum_1^n i \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} + 2z - \lambda\right],$$

so dass also $F(\lambda)$ eine ganze Function $n+1$ ten Grades in $\lambda$ ist, dann ergiebt sich aus 18):

19) $$F(a_i) = f'(a_i) . x_i^2,$$

worin bekanntlich

20) $$f'(a_i) = (a_i - a_1) \ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \ldots (a_i - a_n).$$

Es ist demnach

$$F(+\infty) < 0, \quad F(a_1) > 0, \quad F(a_2) < 0, \ldots$$
$$\ldots F(a_{2k-1}) > 0, \quad F(a_{2k}) < 0, \ldots$$

$F(a_n)$ hat das Zeichen von $(-1)^{n-1}$,

$F(-\infty)$ - - - $(-1)^n$.

Alle $n+1$ Wurzeln der Gleichung $F(\lambda) = 0$ sind also reell, uud man kann schreiben

21) $$F(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_{n+1}),$$

wobei

22) $$+\infty > \lambda_1 > a_1 > \lambda_2 > a_2 > \ldots > a_n > \lambda_{n+1} > -\infty.$$

Aus der Gleichung 4) folgt:

23) $$x_i^2 = \frac{F(a_i)}{f'(a_i)} = -\frac{(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2) \ldots (a_i - \lambda_n)(a_i - \lambda_{n+1})}{(a_i - a_1) \ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \ldots (a_i - a_n)}$$

Diese Gleichung liefert uns umgekehrt aus den krummlinigen Coordinaten

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+1}$$

die Quadrate der unabhängigen rechtwinkeligen:

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots x_n^2$$

Da $F(a_i)$ das Zeichen von $(-1)^{i-1}$, $f'(a_i)$ wegen 20) gleichfalls das Zeichen von $(-1)^{i-1}$ hat, so sind die $x_i^2$ stets positiv. Noch unmittelbarer als die $x_i^2$ bestimmt sich $z$ aus der Glei-

chung 18). Beachtet man, dass in ihr der Coefficient des zweithöchsten Gliedes, der Potenz $\lambda^n$, die Grössen $x_i^2$ gar nicht, die Grösse $z$ aber linear enthält, so folgt mit Berücksichtigung von 17) und 21) durch Gleichsetzung der Coefficienten:

$$\Sigma \lambda_k = 2z + \Sigma a_i$$

oder

24) $$2z = \Sigma \lambda_k - \Sigma a_i.$$

Durch Einsetzen der Werte von $x_i^2$ und $z$ aus 23) und 24) muss die ursprüngliche Gleichung 15) identisch erfüllt werden. Ich will diese Identität nachweisen, indem ich in der Gleichung 15) die Grössen $x_i^2$ durch die in 23) gegebenen Werte ersetze, wodurch sich eine zweite Bestimmungsweise von $z$ ergiebt, deren Resultat mit 24) identisch sein muss. Zu dem Zweck sei gebildet:

$$\sum_1^n {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = \sum_1^n {}_i \frac{F(a_i)}{f'(a_i)} \cdot \frac{1}{\lambda - a_i} = \frac{\overline{F}(\lambda)}{f(\lambda)},$$

eine Gleichung, die an die Partialbruchentwickelung einer rationalen Function erinnert. Die neu eingeführte Funktion $\overline{F}(\lambda)$ hat die zwei Eigenschaften, dass sie vom $n-1$ten Grade (höchstens) ist, und dass für alle $a_i$ stattfindet:

$$\overline{F}(a_i) = F(a_i).$$

Da aber die $a_i$ die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$ sind, so wird $\overline{F}(\lambda)$ in der Form darstellbar sein:

$$\overline{F}(\lambda) = F(\lambda) + (A\lambda + B) . f(\lambda);$$

denn es lassen sich offenbar die Coefficienten $A$ und $B$ so bestimmen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite sich vom $n+1$ten auf den $n-1$ten Grad reduciert. Da nämlich nach 21) und 17)

$$F(\lambda) = -\lambda^{n+1} + \lambda^n \Sigma \lambda_k - \ldots$$
$$f(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} \Sigma a_i + \ldots,$$

so ergiebt sich sofort durch Vergleichung der Coefficienten:

$$A = 1, \qquad B = \Sigma a_i - \Sigma \lambda_k;$$

also

$$\overline{F}(\lambda) = F(\lambda) + (\lambda - \Sigma \lambda_k + \Sigma a_i) . f(\lambda).$$

Wir haben mithin:

$$\sum_1^n i \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = \frac{F(\lambda)}{f(\lambda)} + \lambda - \Sigma \lambda_k + \Sigma a_i.$$

Durch diese Substitution geht Gleichung 15) über in:

$$2z = \Sigma \lambda_k - \Sigma a_i - \frac{F(\lambda)}{f(\lambda)}.$$

Da aber diese Gleichung wegen ihrer Herleitung aus 15) nur identisch besteht für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n+1}$, für welche Werte gleichzeitig $F(\lambda) = 0$ ist, so hat man:

$$2z = \Sigma \lambda_k - \Sigma a_i,$$

ein Resultat, das mit 24) genau übereinstimmt.

Die Gleichung 15) ist für alle Wurzeln $\lambda$ identisch erfüllt; setzt man speciell $\lambda = \lambda_\mu$ und $\lambda = \lambda_\nu$, worin $\mu \gtrless \nu$, und bildet die Differenz, so ergiebt sich die von $z$ unabhängige Relation:

25) $$\sum_1^n i \frac{x_i^2}{(\lambda_\mu - a_i)(\lambda_\nu - a_i)} + 1 = 0.$$

Es erhebt sich nun die Frage, was aus dieser Gleichung wird, wenn in ihr $\mu = \nu$ ist, d. h. welchen Werth der Ausdruck

26) $$L_k = \sum_1^n i \frac{x_i^2}{(\lambda_k - a_i)^2} + 1$$

hat. Diese Frage beantwortet sich sofort, wenn Gleichung 18) oder:

$$\frac{F(\lambda)}{f(\lambda)} = \sum_1^n i \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} + 2z - \lambda$$

nach $\lambda$ differentiiert wird. Man erhält dadurch

$$\frac{F'(\lambda)}{f(\lambda)} - \frac{F(\lambda) . f'(\lambda)}{f(\lambda)^2} = - \sum_1^n i \frac{x_i^2}{(\lambda - a_i)^2} - 1,$$

also, da $F(\lambda_k) = 0$:

27) $$L_k = -\frac{F'(\lambda_k)}{f(\lambda_k)} = \frac{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_{n+1})}{(\lambda_k-a_1)(\lambda_k-a_2)\ldots(\lambda_k-a_{n-1})(\lambda_k-a_n)}$$

Da der Zähler nach 22) das Zeichen von $(-1)^{k-1}$, desgleichen der Nenner das Zeichen von $(-1)^{k-1}$ hat, so sind, wie es wegen 26) sein muss, alle $L_k$ positiv.

Will man das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = \Sigma\, dx_i^2 + dz^2$$

bilden, so hat man aus 23) durch logarithmische Differentiation abzuleiten

$$\frac{2dx_i}{x_i} = \sum_1^{n+1} {}_k \frac{d\lambda_k}{\lambda_k - a_i}.$$

und hieraus durch Quadrierung

$$4\,d\,x_i^2 = x_i^2 \sum_1^{n+1}{}_\mu \sum_1^{n+1}{}_\nu \frac{d\,\lambda_\mu}{\lambda_\mu - a_i} \cdot \frac{d\,\lambda_\nu}{\lambda_\nu - a_i}$$

und durch Summation über $i$

$$4 \sum_1^{n}{}_i\, d\,x_i^2 = \sum_1^{n+1}{}_\mu \sum_1^{n+1}{}_\nu\, d\,\lambda_\mu\, d\,\lambda_\nu \,.\, \sum_1^{n}{}_i \frac{x_i^2}{(\lambda_\mu - a_i)(\lambda_\nu - a_i)}.$$

Addiert man hierzu das Quadrat der Differentialgleichung von 24):

$$4\,dz^2 = \sum_1^{n+1}{}_\mu \sum_1^{n+1}{}_\nu\, d\,\lambda_\mu \,.\, d\,\lambda_\nu\,,$$

so folgt vermöge der Gleichungen 26) und 27):

28) $$4\,ds^2 = \Sigma\, L_k\, d\,\lambda_k^2.$$

Diese eleganten Untersuchungen werden uns unten in sofern von hohem Nutzen sein, als sie uns umständliche Rechnungen ersparen.

Wir wenden uns jetzt speciell zum hyperbolischen Paraboloid, dessen Gleichung wir in der Form annehmen:

29) $$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0,$$

wo $a$ und $b$ positive reelle, sonst aber beliebige Grössen be-

deuten. Die Schaar der mit demselben confocalen Flächen wird dargestellt durch die Gleichung:

30) $$\frac{x^2}{a-\lambda} - \frac{y^2}{b+\lambda} - 2z + \lambda = 0.$$

Ihre Focalcurven sind nach dem Früheren:

31) $$\frac{y^2}{a+b} + 2z - a = 0 \qquad x = 0$$

32) $$\frac{x^2}{a+b} - 2z - b = 0 \qquad y = 0.$$

Ich will nun der Kürze wegen die Fläche

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0 \qquad a > 0 \qquad b > 0$$

ein positiv gelegenes elliptisches Paraboloid, dagegen eine Fläche von der Form

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2z = 0$$

ein negativ gelegenes elliptisches Paraboloid nennen, je nachdem die Richtung vom Scheitel nach dem Berührungspunkt der unendlich fernen Ebene mit der $z$-Achse gleichlaufend oder ihr entgegengesetzt gerichtet ist.

Lässt man nun in Gleichung 30) den Parameter $\lambda$ alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man für $\lambda = -\infty$ die unendlich ferne Ebene; dann folgen positiv liegende elliptische Paraboloide, die sich immer mehr zusammenziehen und deren Scheitel auf der negativen $z$-Achse in der Richtung nach dem Anfangspunkt bis zum Punkte $z = -\frac{b}{2}$ hinrückt. Für $\lambda = -b - \delta$, worin $\delta$ positiv unendlich klein, geht die Fläche über in die doppelt überdeckte $xz$-Ebene, und zwar offenbar in denjenigen Teil, der von der Focalparabel 32) eingeschlossen wird. Für $\lambda = -b + \delta$ wird sie sofort überspringen in den ausgeschlossenen Teil

derselben Ebene. Wächst $\lambda$ weiter, so erweitert sich diese doppelt überdeckte Ebene in hyperbolische Paraboloide, welche schliesslich für $\lambda = a - \delta$ zusammenklappen in denjenigen Teil der doppelt überdeckten $yz$-Ebene, welcher von der Focalparabel 31) ausgeschlossen wird. Für $\lambda = a + \delta$ erhalten wir den eingeschlossenen Teil in derselben Ebene, der sich bei weiter wachsendem $\lambda$ ausdehnt zu einer Schaar von negativ gelegenen elliptischen Paraboloiden, deren Scheitel in der Richtung der positiven $z$-Achse vom Punkte $z = \frac{a}{2}$ aus immer weiter rückt und welche sich immer mehr erweitern, bis sie für $\lambda = +\infty$ schliesslich wieder mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen.

Es geht also durch jeden Punkt des Raumes ein positiv gelegenes elliptisches, ein hyperbolisches und ein negativ gelegenes elliptisches Paraboloid. Diese drei Flächen bestimmen aber nicht einen Punkt, sondern im ganzen vier, welche auf einer Parallelebene der $xy$-Ebene, und zwar symmetrisch zur $yz$- und $zx$-Ebene liegen. Es wird daher ein Punkt im Raume eindeutig bestimmt sein, wenn man ausser den drei parabolischen Coordinaten noch das Verzeichen von $x$ und $y$ kennt, — dasjenige von $z$ ist durch die parabolischen Coordinaten eindeutig bestimmt.

Wir wollen nun die allgemeinen Formeln 15) bis 28) specialisieren für unser hyperbolisches Paraboloid, und zwar für den Fall, dass wir dasselbe festhalten und jeden Punkt desselben als Schnittpunkt eines confocalen positiv liegenden und eines confocalen negativ liegenden elliptischen Paraboloids auffassen. Wir haben alsdann zu setzen:

$$n = 2; \quad x_1 = x, \quad x_2 = y; \quad a_1 = a, \quad a_2 = -b;$$
$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \mu; \quad L_1 = L, \quad L_3 = M.$$

Dadurch geht 15) über in 29) und 22) in

$$-\infty < \mu < -b$$

33)

$$+a < \lambda < +\infty,$$

und die drei confocalen Flächen sind repräsentiert durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0 \quad \text{hyp. Par.}$$

34)

$$\frac{x^2}{a-\lambda} - \frac{y^2}{b+\lambda} - 2z + \lambda = 0 \quad \text{neg. lieg. ell. Par.}$$

$$\frac{x^2}{a-\mu} - \frac{y^2}{b+\mu} - 2z + \mu = 0 \quad \text{pos. lieg. ell. Par.}$$

An Stelle der Gleichungen 23) bis 28) erhält man, wenn man noch zur Abkürzung und um die Nenner zu vermeiden

35)

$$k^2 = \frac{b}{a+b}, \quad k'^2 = \frac{a}{a+b},$$

setzt, wobei $k$ und $k'$ reell und $k + k'^2 = 1$, ohne weiteres der Reihe nach:

36)

$$x^2 = -k'^2 (a-\lambda)(a-\mu)$$
$$y^2 = -k^2 (b+\lambda)(b+\mu)$$
$$2z = \lambda + \mu - a + b$$

37)

$$\frac{x^2}{a(a-\lambda)} + \frac{y^2}{b(b+\lambda)} + 1 = 0$$
$$\frac{x^2}{a(a-\mu)} + \frac{y^2}{b(b+\mu)} + 1 = 0$$
$$\frac{x^2}{(a-\lambda)(a-\mu)} + \frac{y^2}{(b+\lambda)(b+\mu)} + 1 = 0$$

38)

$$L = \frac{\lambda(\mu-\lambda)}{(a-\lambda)(b+\lambda)}$$
$$L > 0, \quad M > 0$$
$$M = \frac{\mu(\lambda-\mu)}{(a-\mu)(b+\mu)}$$

39)

$$4\,ds^2 = L\,d\lambda^2 + M\,d\mu^2.$$

In 36) sind die Ausdrücke für $x^2$ und $y^2$ wegen 33) positiv. Die Gleichungen 37), welche nichts weiter sind als die

Differenzen je zweier Gleichungen des Systems 34) sagen aus, dass je zwei Flächen des Systems 34) sich orthogonal schneiden.

Mit Hilfe der eben entwickelten Formeln, die an Einfachheit, Symmetrie und Eleganz nichts zu wünschen übrig lassen, kann man mit Vorteil alle Probleme behandeln, welche die Paraboloide betreffen. Ich wende mich nunmehr speciell zu der im Thema gestellten Aufgabe.

## § 3.

## Die conforme Abbildung des hyperbolischen Paraboloids auf einer Ebene.

Ist eine Fläche conform auf einer Ebene abgebildet, so sind bekanntlich entsprechende unendlich kleine Dreiecke einander ähnlich, die Bedingung hierfür ist, dass die von einem Punkte der Fläche ausgehenden Linienelemente proportional sind den entsprechenden Linienelementen in der Ebene. Diese Proportionalität ist analytisch auszudrücken.

Es sei das Quadrat des Bogenelements auf einer mittels der orthogonalen Parameter $\lambda$ und $\mu$ dargestellten Oberfläche

$$4\,ds^2 = L\,d\lambda^2 + M\,d\mu^2,$$

das Quadrat des entsprechenden Bogenelementes in der Ebene

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2,$$

wo $\xi$ und $\eta$ die rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene sind. Dann gilt also die Beziehung

$$d\sigma = m\,ds,$$

worin $m$ das Ähnlichkeitsverhältnis ist, das nur von $\lambda$ und $\mu$, nicht aber $d\lambda$ und $d\mu$ abhängig ist. Es kommt nun darauf an, zwei Functionen von $\lambda$ und $\mu$

$$\xi = p(\lambda, \mu) \qquad \eta = q(\lambda, \mu)$$

derart zu bestimmen, dass jene Beziehung erfüllt ist, d. h. es muss die Differentialgleichung

$$dp^2 + dq^2 = m^2 (\tfrac{1}{4} L\, d\lambda^2 + \tfrac{1}{4} M\, d\mu^2),$$

in der noch $m$ unbestimmt ist, integriert werden. Da sich die linke Seite in zwei complexe Linearfactoren zerlegen lässt, welche vollständige Differentiale sind, so muss $m^2$ von einer solchen Beschaffenheit sein, dass dies auch für die rechte Seite möglich ist, und es ist die einzige Aufgabe bei der conformen Abbildung einer Fläche, $m^2$ demgemäss zu bestimmen. Für den Fall der Flächen 2. O., auch der paraboloidischen, ist dieses besonders leicht. Setzt man in die letzte Gleichung aus 38) die Werte für $L$ und $M$ ein, so erhält man

$$dp^2 + dq^2 = m \left\{ \frac{1}{4} \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{(a - \lambda)(b + \lambda)} d\lambda^2 + \frac{1}{4} \frac{\mu(\lambda - \mu)}{(a - \mu)(b + \mu)} d\mu^2 \right\},$$

und man hat nur

$$m^2 = \frac{C^2}{\lambda - \mu}$$

zu setzen, wo $C$ eine reelle Constante ist, die sich noch zweckmässig bestimmen lässt, um diese Gleichung (auf zwei Arten) in die beiden folgenden zerlegen zu können, in welchen auch die rechten Seiten totale Differentiale sind:

$$dp + i dq = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{-\lambda}{(a - \lambda)(b + \lambda)}}\, d\lambda \pm i \cdot \frac{C}{2} \sqrt{\frac{\mu}{(a - \mu)(b + \mu)}}\, d\mu$$

$$dp - i dq = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{-\lambda}{(a - \lambda)(b + \lambda)}}\, d\lambda \mp i \frac{C}{2} \sqrt{\frac{\mu}{(a - \mu)(b + \mu)}}\, d\mu,$$

woraus folgt

$$dp = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{-\lambda}{(a - \lambda)(b + \lambda)}}\, d\lambda \qquad \pm dq = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{\mu}{(a - \mu)(b + \mu)}}\, d\mu.$$

Hat man hieraus $p$ und $q$ bestimmt, so sind alle conformen Abbildungen auf der Ebene $\xi$, $\eta$ in der Form enthalten

$$\xi + i\eta = f(p \pm iq),$$

wo $f$ eine beliebige analytische Function bedeutet. Dass dieses sich so verhält, folgt einerseits daraus, dass nicht nur $\frac{C}{\sqrt{\lambda-\mu}}$, sondern allgemein $\frac{C}{\sqrt{\lambda-\mu}} f'(p \pm iq)$ ein integrierender Factor des linearen Differentialausdruckes

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{L}\,d\lambda \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{M}\,d\mu$$

ist, andererseits aus der bekannten Eigenschaft einer jeden analytischen Function, dass durch dieselbe zwei Ebenen conform auf einander abgebildet werden.

In der That haben wir, wenn wir noch zur Abkürzung

$$f'(p+qi) = P+iQ$$
$$f'(p-qi) = P-iQ$$

setzen, durch Differentiation

$$d\xi + i d\eta = (P \pm iQ)(dp \pm idq)$$
$$d\xi - i d\eta = (P \mp iQ)(dp \mp idq),$$

und hieraus durch Multiplikation

$$d\sigma^2 = (P^2+Q^2)\frac{C^2}{\lambda-\mu}ds^2.$$

Wir haben also eine conforme Abbildung mit dem Ähnlichkeitsverhältnis

$$c\sqrt{\frac{P^2+Q^2}{\lambda-\mu}}.$$

Der Unterschied, der durch die Verschiedenheit des Vorzeichens bedingt wird, ist leicht ersichtlich. Da nämlich

$$d\xi = Pdp - Qdq$$
$$\pm d\eta = Qdp + Pdq,$$

so folgt, wenn $\frac{dq}{dp} = \operatorname{tg} a$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\alpha$ gesetzt wird,

$$\pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{Q+P\operatorname{tg} a}{P-Q\operatorname{tg} a} = \frac{P^2+Q^2}{Q(P-Q\operatorname{tg} a)} - \frac{P}{Q},$$

also

$$\pm\frac{d\operatorname{tg}\alpha}{d\operatorname{tg} a} = \frac{P^2+Q^2}{(P-Q\operatorname{tg} a)^2}.$$

Wächst nun $a$ von 0 bis $2\pi$, so ist $d\operatorname{tg} a$ stets positiv; da auch die rechte Seite der Gleichung stets positiv ist, so muss im Falle des oberen Vorz. $\alpha$ wachsen, im Falle des unteren Vorz. $\alpha$ abnehmen, damit auch $\pm\, d\operatorname{tg}\alpha$ positiv ist.

Im ersten Falle sind nicht nur die von zwei entsprechenden Punkten ausgehenden Linienelemente proportional und bilden dieselben Winkel, sondern diese Winkel folgen auch in derselben Drehungsrichtung auf einander, so dass „direkte Ähnlichkeit" stattfindet. Im zweiten Falle sind die Drehungsrichtungen entgegengesetzt, und es findet „inverse Ähnlichkeit" statt. Man kann mithin das Vorzeichen stets so wählen, dass direkte Ähnlichkeit stattfindet.

Von direkter und inverser Ähnlichkeit kann man jedoch nur dann sprechen, wenn man eine bestimmte Seite der Fläche ins Auge fasst, auf welcher die Abbildung stattfinden soll, z. B. die positive[1]). Als positive Seite der Fläche $f(x, y, z) = 0$ kann man z. B. diejenige definieren, für deren Nachbarpunkte $f(x, y, z) > 0$ ist, als positive Seite der $\xi\eta$-Ebene diejenige, nach welcher hin sich die Richtung der positiven $\zeta$-Achse erstreckt. Nimmt man jedoch die andere Seite dieser Ebene als die positive an, was sich durch Änderung der Richtung der Coordinatenachsen stets machen lässt, so wird sich auf dieser auch die Art der Ähnlichkeit umkehren, d. h. hat man auf der einen Seite eine invers ähnliche Abbildung, so hat man auf der andern eine direkt ähnliche und umgekehrt. Es besteht mithin zwischen beiden Arten der Abbildung durchaus kein wesentlicher Unterschied; und will man immer nur eine und dieselbe Seite der Projektionsebene ins Auge fassen, so kann man das Vorzeichen stets so wählen, dass man eine direkt ähnliche Abbildung erhält. Nimmt also $tg a = \frac{dq}{dp}$ zu, wenn man auf der (oben

1) Vgl. Gauss' Werke IV. Bd.

definierten) positiven Seite der gegebenen Fläche einen positiven Umlauf macht, so ist in diesem Falle das obere Zeichen zu wählen, nimmt es ab, so das untere.

Den unteren Grenzen der Integrale für $p$ und $q$ kann man bestimmte Werte beilegen, da ja die willkürliche Function schon alle Fälle umfasst. Wegen 33) wählt man zweckmässig

$$40)\quad p = \frac{C}{2}\int_a^\lambda \sqrt{\frac{-\lambda}{(a-\lambda)(b+\lambda)}}\,d\lambda \qquad \pm q = \frac{C}{2}\int_{-b}^\mu \sqrt{\frac{\mu}{(a-\mu)(b+\mu)}}\,d\mu.$$

Man erkennt auf den ersten Blick, dass diese Ausdrücke elliptische Integrale zweiter Gattung darstellen. Die Verzweigungspunkte sind

$$a \quad -b \quad 0 \quad \infty.$$

In den Punkten $a$, $-b$ und $0$ verhalten sich die Integrale stetig; um den Punkt $\infty$ zu untersuchen, kann man etwa schreiben

$$p = \frac{C}{2}\int_a^\lambda \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{a}{\lambda}\right)\left(1+\frac{b}{\lambda}\right)}}\cdot\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}};$$

der erste Factor unter dem Integralzeichen ist bei Annäherung an den Unendlichkeitspunkt beliebig wenig von der Einheit verschieden; es wird mithin $p$ unendlich wie die Function $C\sqrt{\lambda}$, desgleichen $q$ wie die Function $C\sqrt{-\mu}$. Die Variable $\lambda$ geht von $a$ bis $+\infty$, $\mu$ von $-b$ bis $-\infty$; wir wollen nun, um die kanonische Form zu erhalten und später die Jacobischen $\vartheta$-Functionen anwenden zu können, die Integrale 40) derart transformieren, dass die Variabeln die Wertereihe von 0 bis 1 durchlaufen, wodurch der Punkt 1 zum neuen Unendlichkeitspunkt wird, und dass ferner der Verzweigungspunkt 0 in die Unendlichkeit verlegt wird. Als anzuwendende Substitution hat man sofort

41) $$\lambda = \frac{a}{1-s} \qquad \mu = \frac{-b}{1-t}.$$

Sieht man noch vom Vorzeichen von $q$ ab, da das doppelte Vorzeichen schon in dem Ausdruck $f(p \pm qi)$ vorgesehen ist, und setzt, um möglichste Einfachheit zu erzielen, die unbestimmte Constante $C = \frac{1}{\sqrt{a+b}}$, so erhält man unter Berücksichtigung der Bezeichnungen 35) an Stelle der Gleichungen 40):

42) $$p = \int_0^s \frac{k'^2 \cdot \frac{1}{2}\, ds}{(1-s)\sqrt{s(1-s)(1-k^2 s)}}$$

$$q = \int_0^t \frac{k^2 \cdot \frac{1}{2}\, dt}{(1-t)\sqrt{t(1-t)(1-k'^2 t)}}.$$

Die Grössen $k$ und $k'$ sind demnach die Moduln der elliptischen Integrale. Setzen wir nun

$$s = \operatorname{sn}^2(u, k) \qquad t = \operatorname{sn}^2(v, k'),$$

und treffen, um Eindeutigkeit für $u$ und $v$ zu erzielen, die Bestimmung, dass etwa $u$ von 0 bis $K$ und $v$ von 0 bis $K'$ gehen soll, wo

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \qquad K' = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2 v^2)}},$$

$$K > 0 \quad K' > 0,$$

so werden $s$ und $t$ ihre sämmtlichen Werte von 0 bis 1 einmal annehmen. Die Substitutionen 41) gehen nunmehr über in

43) $$\lambda = \frac{a}{\operatorname{cn}^2(u, k)} \qquad \mu = \frac{-b}{\operatorname{cn}^2(v, k')}.$$

Schreiben wir der Kürze wegen

$$\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}(v, k') = \operatorname{sn} v$$

u. s. w., indem wir uns eine jede elliptische Function von $u$

auf den Modul $k$, eine jede elliptische Function von $v$ auf den Modul $k'$ bezogen denken, so werden durch die gewonnene Substitution 43) die Gleichungen 36), welche den Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und den parabolischen Coordinaten der Punkte unserer Fläche geben, übergehen in folgende ebenso einfache wie elegante Form:

44)
$$x = a\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}\cdot\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v}$$
$$y = b\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\cdot\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v}$$
$$2z = a\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u} - b\frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{cn}^2 v}.$$

Das doppelte Vorzeichen, das vor den durch Ausziehen der Quadratwurzel gewonnenen Ausdrücken für $x$ und $y$ zu stehen hätte, lässt sich dadurch beseitigen, das man den Geltungsbereich von $u$ und $v$ erweitert, welche bisher nur zwischen den Grenzen 0 und $K$ resp. $K'$ variierten. Da *sn* eine ungerade Function, *cn* und *dn* aber gerade Functionen sind, so wird durch Änderung von $u$ in $-u$ $x$ übergehen in $-x$, während $y$ ungeändert bleibt; desgleichen wird durch Änderung von $v$ in $-v$ $x$ ungeändert bleiben, während $y$ in $-y$ übergeht. Definieren wir also

45)
$$-K < u < +K$$
$$-K' < v < +K',$$

so sind sämmtliche Vorzeichen-Combinationen von $x$ und $y$ möglich. Und setzen wir nun

46)
$$\Omega u = \int_0^u \frac{k'^2\,du}{\operatorname{cn}^2 u}$$
$$\Omega v = \int_0^v \frac{k^2\,dv}{\operatorname{cn}^2 v},$$

so sind alle conformen Abbildungen des hyperbolischen Paraboloids 44) auf der Ebene $\xi\eta$ in dem Ausdruck enthalten

$$\xi + i\eta = f(\Omega u + i\Omega v),$$

und das Ähnlichkeitsverhältnis wird

$$\frac{1}{a+b} \cdot \frac{\operatorname{cn} u \,.\, \operatorname{cn} v}{\sqrt{k^2 \operatorname{cn}^2 u + k'^2 \operatorname{cn}^2 v}} \cdot \sqrt{f'(\Omega u + i\Omega v)\, f'(\Omega u - i\Omega v)}.$$

Die Gleichungen $u = const$ und $v = const$ stellen noch immer die beiden Schaaren der Krümmungslinien dar; durchläuft $u$ die Werte von $-K$ bis $+K$, desgleichen $v$ die Werte von $-K'$ bis $+K'$, so erhält man sämmtliche Krümmungslinien des hyperbolischen Paraboloids und jede nur einmal. Da man aber z. B. für $\lambda = \lambda_1$ die beiden Werte $u = u_1$ und $u = -u_1$ hat, so wird durch die neue Parameter-Darstellung 44) der Flächengleichung, welche vor der früheren den grossen Vorzug hat, dass sie die Punkte der Fläche eindeutig bestimmt, eine jede Krümmungslinie $\lambda$ oder $\mu$ in ihre beiden Zweige zerfällt.

## § 4.

## Die Function $\Omega u$.

Hat man das Radikal des elliptischen Integrals zweiter Gattung auf die Verzweigungspunkte

$$0 \quad 1 \quad \frac{1}{k^2} \quad \infty$$

reduciert, so kann ,der Unendlichkeitspunkt des Integrals mit einem jeden dieser vier Verzweigungspunkte zusammenfallen, und es sind dementsprechend die vier Hauptformen des elliptischen Integrals zweiter Gattung:

$$\int\limits_0^z \frac{\frac{1}{2}k^2 z\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}} \qquad \int\limits_1^z \frac{\frac{1}{2}dz}{z\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}$$

$$\int\limits_0^z \frac{\frac{1}{2}k'^2 dz}{(1-z)\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}} \qquad \int\limits_0^z \frac{\frac{1}{2}k'^2 dz}{(1-k^2 z)\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}.$$

Dieselben lassen sich durch Vertauschung der Verzweigungspunkte mittels leicht zu bildender linearer Substitutionen in einander überführen, wobei noch ein elliptisches Integral erster Gattung hinzutritt; es ist jedoch diese Thatsache für unseren Zweck von keiner wesentlichen Bedeutung. Setzt man $z = x^2$, so erhält man die Integrale

$$\int\limits_0^x \frac{k^2 x^2 dx}{\triangle x} \quad \int\limits_1^x \frac{dx}{x^2 \triangle x} \quad \int\limits_0^x \frac{k'^2 dx}{(1-x^2)\triangle x} \quad \int\limits_0^x \frac{k'^2 dx}{(1-k^2 x^2)\triangle x}$$

wo $\triangle x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}$, oder wenn $x = \operatorname{sn} u$:

$$Zu = \int\limits_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u\, du \qquad Z_1 u = \int\limits_1^u \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u}$$

$$\Omega u = \int\limits_0^u \frac{k'^2 du}{\operatorname{cn}^2 u} \qquad \Omega_1 u = \int\limits_0^u \frac{k'^2 du}{\operatorname{dn}^2 u}.$$

Diese Functionen sind analytisch ihrer Definition nach, eindeutig, weil die Residuen in bezug auf die Unendlichkeitspunkte der Differentialausdrücke verschwinden. Die Eindeutigkeit zeigt sich auch bei der Entwickelung in $\vartheta$-Functionen; dann werden die charakteristischen Bestandteile jener Functionen ausgedrückt sein durch

$$\frac{\theta' u}{\theta u} \quad \frac{H' u}{H u} \quad \frac{H_1' u}{H_1 u} \quad \frac{\theta_1' u}{\theta_1 u}.$$

In den Lehrbüchern ist in der Regel nur die Function

$$Zu = \int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u\, du = \zeta u - \frac{\theta' u}{\theta u},$$

worin

$$\zeta = \frac{1}{2K}\int_0^{2K} k^2 \operatorname{sn}^2 u\, du = \frac{\theta'' 0}{\theta 0} > 0,$$

behandelt[1]); es ist aber klar, dass sich die übrigen Functtonen genau in der nämlichen Weise behandeln lassen. Man kann daher beim Studium der Function $\Omega u$ ihre Eigenschaften entweder selbständig entwickeln oder sie aus denjenigen von $Zu$ herleiten.

Ein Weg, der sich bei der zweiten Methode einschlagen lässt, soll nur mit wenigen Worten angedeutet werden. Das erste der zu Anfang dieses § stehenden vier Integrale erhält man aus dem dritten durch zweimalige cyklische Vertauschung der Verzweigungspunkte

$$\begin{matrix} 0 & 1 & \frac{1}{k^2} & \infty \\ \frac{1}{k^2} & \infty & 0 & 1; \end{matrix}$$

die anzuwendende Substitution ist also

$$z = \frac{1 - k^2 z'}{k^2(1 - z')}.$$

Setzt man hierin

$$z = \operatorname{sn}^2 u \qquad z' = \operatorname{sn}^2 u',$$

so ergiebt sich

$$u' = u + K + K' i.$$

Die Substitution ist also aequivalent mit der identischen Formel

$$\frac{k'}{\operatorname{cn} u} = ik \operatorname{cn}(u + K + K' i),$$

aus welcher die Beziehung zwischen $Zu$ und $\Omega u$ herzuleiten ist. In der That ergiebt sich

1) S. z. B. Laurent, fonct. ell. p. 111, Hermite, Übersicht der ell. F. übers. v. Natani p. 75.

$$\Omega u = Z(u + K + K'i) - Z(K + K'i) - k^2 u$$

und hieraus mit Leichtigkeit die $\vartheta$-Formel der Function $\Omega u$.

Man kann aber mit einem Schlage alle vier Functionen ohne jede Recursion in den $\vartheta$ ausdrücken auf folgende Weise. Beachtet man nämlich, dass der Zusammenhang zwischen den elliptischen und den $\vartheta$-Functionen durch die Formeln gegeben wird

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{Hu}{\Theta u} \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1 u}{\Theta u} \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1 u}{\Theta u},$$

so kann man, wenn man den Logarithmus nimmt und zweimal differentiiert, daraus ableiten:

$$\left[\frac{H'u}{Hu}\right]' = \left[\frac{\Theta' u}{\Theta u}\right]' + k^2 \operatorname{sn}^2 u - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}$$

$$\left[\frac{H_1' u}{H_1 u}\right]' = \left[\frac{\Theta' u}{\Theta u}\right]' + k^2 \operatorname{sn}^2 u - \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 u} - k^2$$

$$\left[\frac{\Theta_1' u}{\Theta_1 u}\right]' = \left[\frac{\Theta' u}{\Theta u}\right]' + k^2 \operatorname{sn}^2 u + \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 u} - 1$$

An Stelle dieser drei Gleichungen kann man bei Einführung einer neuen Function $\varphi u$ die vier Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi u &= \left[\frac{\Theta' u}{\Theta u}\right]' + k^2 \operatorname{sn}^2 u \\ &= \left[\frac{H' u}{H u}\right]' + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} \\ &= \left[\frac{H_1' u}{H_1 u}\right]' + \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 u} + k^2 \\ &= \left[\frac{\Theta_1' u}{\Theta_1 u}\right]' - \frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 u} + 1. \end{aligned}$$

Da bekanntlich eine jede Function $\left[\frac{\vartheta' u}{\vartheta u}\right]'$ doppelt-periodisch ist, so ist auch $\varphi u$ eine doppelt-periodische Function von der zweiten Ordnung mit den Perioden $2K$ und $2K'i$; da aber die Unendlichkeitsstellen in allen vier Ausdrücken

verschieden sind, so muss $\varphi u$ constant sein. Setzt man $u = 0$, so erhält man für diese Constante

$$\varphi u = \frac{\Theta''0}{\Theta 0} = \frac{H_1''0}{H_1 0} + 1 = \frac{\Theta_1''0}{\Theta_1 0} + k^2 = \zeta;$$

also ist

$$Zu = \zeta u - \frac{\theta' u}{\theta u} \qquad Z_1 u = \zeta(u - K) - \frac{H' u}{Hu}$$

$$\Omega u = (\zeta - k^2) u - \frac{H_1' u}{H_1 u} \quad \Omega_1 u = (1 - \zeta) u + \frac{\theta_1' u}{\theta_1 u}.$$

Setzt man noch

47) $$\omega = \frac{\theta_1''0}{\theta_1 0} = -\frac{2\pi^2}{K^2} \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + \ldots}{1 + 2\{q + q^4 + q^9 + \ldots\}} < 0 \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

so hat man

48) $$\Omega u = \omega u - \frac{H_1' u}{H_1 u}.$$ [1]

Da

$$H_1(-u) = H_1 u$$

und also

$$\frac{H_1'(-u)}{H_1(-u)} = -\frac{H_1' u}{H_1 u}$$

ist, so ist $\Omega u$ eine ungerade Function. Da ferner $u$ zwischen $-K$ und $+K$ definiert ist und $K$ der kleinste absolute Wert ist, für den $\Omega u$ unendlich werden kann (denn die Nullstellen von $H_1 u$ sind ja durch den Ausdruck

$$(2m+1) K + 2nK'i$$

gegeben), so lässt sich unsere Function in eine Potenzreihe entwickeln von der Form:

$$\Omega u = Au + Bu^3 + Cu^5 + \ldots,$$

deren Coefficienten von $K$ und $K'$ abhängen, und die convergent ist für $|u| < K$, d. h. für unser ganzes Intervall. Auch umgekehrt wird $u$ eine eindeutige Function von $\Omega u$ sein, wenn man sich auf dieses Intervall beschränkt.

1) Es erscheint recht merkwürdig, dass die Abbildungsfunction $\Omega u$ hier eine eindeutige ist, während man es bei der Abbildung der centrischen Flächen mit Integralen dritter Gattung, d. i. mit Logarithmen von $\vartheta$-Functionen zu thun hat. Vgl. Jacobi's ges. Werke Bd. 2, p. 409, Supplbd. p. 2:7.

Da

$$\Omega' u = \frac{k'^2}{\mathrm{cn}^2 u} > 0,$$

so wird $\Omega u$ im Intervall von $-K$ bis $+K$ fortwährend wachsen. Da ferner

$$\Omega'' u = \frac{2k'^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}^3 u},$$

so ist $u = 0$ Inflexionspunkt der Curve, und da $\Omega' 0 = k'^2$, so ist der Neigungswinkel der Tangente im Inflexionspunkt

$$= \mathrm{arc\,tg}\, k'^2 < \frac{\pi}{4}.$$

Beachtet man noch, dass

$$\Omega 0 = 0 \quad \Omega K = \infty \quad \Omega(-K) = -\infty,$$

so ist der Verlauf der Function $\Omega u$ innerhalb ihres Intervalls hinreichend klar.

Um eine tiefere Einsicht in die Natur der Function

$$\Omega u = \omega u - \frac{H_1' u}{H_1 u}$$

zu bekommen, fassen wir sie auf als analytische Function der unbeschränkten complexen Variabeln $u$ [1]), und wollen zunächst zusehen, was aus ihr wird, wenn wir das Argument um Vielfache der Grössen $K$ und $iK'$ vermehren.

Dazu führen wir die Grössen ein

49) $$\int_{K'i}^{-K+K'i} \frac{k'^2 du}{\mathrm{cn}^2 u} = H \qquad \int_0^{K'i} \frac{k'^2 du}{\mathrm{cn}^2 u} = H' i,$$

worin die Integrale geradlinig sein sollen, so dass also

$$\Omega(K'i) = H' i \quad \Omega(-K + K'i) = H + H' i.$$

---

1) Die nachfolgende Theorie gilt für jede elliptische Function zweiter Gattung $\frac{\vartheta' u}{\vartheta u}$.

Da

$$\frac{H_1'(u+K'i)}{H_1(u+K'i)} = \frac{\Theta_1'u}{\Theta_1 u} - \frac{\pi i}{2K}$$

und

$$\Theta_1'0 = \Theta_1'K = 0$$

ist, so ergiebt sich für $H$ und $H'$ sofort

50)
$$H = -K\omega > 0$$
$$H' = \quad K'\omega + \frac{\pi}{2K},$$

und hieraus durch Elimination von $\omega$ die bekannte Formel

51) $$KH' + HK' = \frac{\pi}{2}$$ [1])

Es ist noch zu untersuchen, was aus $H$ und $H'$ bei einer Vertauschung von $K$ und $K'$ wird. Diese beiden Grössen $K$ und $K'$ stellen sich in der Theorie der elliptischen Functionen, als Periodicitätsmoduln berechnet, zunächst auch als bestimmte Integrale desselben Ausdrucks zwischen verschiedenen Grenzen dar, nämlich

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad K'i = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Macht man aber in der zweiten Gleichung die Substitution

$$k^2x^2 + k'^2x'^2 = 1,$$

so erhält man

$$K' = \int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k'^2x'^2)}},$$

so dass bei einer Vertauschung von $k$ und $k'$ sich auch $K$ und $K'$ vertauschen. Auch $H$ und $H'$ lassen sich als be-

1) Ich habe abweichend vom gewöhnlichen Gebrauch die Grösse $H$ mit dem Zeichen plus versehen, damit bei Vertauschung der Moduln $k$ und $k'$ nicht nur $K$ und $K'$, sondern auch $H$ und $H'$ in einander übergehen, wie gleich nachher gezeigt wird.

stimmte geradlinige Integrale in analoger Weise darstellen. Setzen wir zu dem Zwecke in 49) $\operatorname{sn} u = x$, so ist, da im zweiten Integrale die Variabele $u$ die imaginäre Reihe von 0 bis $K'i$ durchläuft, noch zu untersuchen, was $\operatorname{sn} u$ bedeutet, wenn $u$ rein imaginär. Schreiben wir

$$\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = \operatorname{tn} u$$

und vergleichen die beiden Differentialgleichungen

$$z = \operatorname{sn} x \qquad \frac{dz}{dx} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$$

$$z = \operatorname{tn} x \qquad \frac{dz}{dx} = \sqrt{(1 + z^2)(1 + k^2 z^2)},$$

welche letztere leicht abzuleiten, so erkennen wir, dass die erste vom Modul abgesehen in die zweite übergeht, wenn wir in ihr $zi$ statt $z$ und $xi$ statt $x$ schreiben, so dass also

$$zi = \operatorname{sn}(xi, k).$$

Mithin ist

$$\operatorname{sn}(xi, k) = i \frac{\operatorname{sn}(x, k')}{\operatorname{cn}(x, k')}\ {}^{1)}.$$

Setzen wir nun im ersten Integral

$$x = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(K'i + \xi) = \frac{1}{k \operatorname{cn} \xi},$$

im zweiten

$$yi = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn} \eta i = i \frac{\operatorname{sn}(\eta, k')}{\operatorname{cn}(\eta, k')},$$

so wird $\xi$ von 0 bis $-K$, $\eta$ von 0 bis $+K'$ gehen, mithin

---

1) Ebenso findet man

$$\operatorname{cn}(xi, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(x, k')}$$

und da

$$\operatorname{dn}(xi, k) = \frac{\operatorname{dn}(x, k')}{\operatorname{cn}(x, k')}.$$

Vgl. Jacobi, fund. nova § 19, Ges. W. Bd. I. p. 85, 86.

$x$ von $-\infty$ bis $-\frac{1}{k}$, $y$ von 0 bis $+\infty$. Da demnach

$$\frac{dx}{d\xi} < 0 \qquad \frac{dy}{d\eta} > 0$$

und, weil

$$\frac{d\xi}{du} = 1 \qquad \frac{d\eta}{du} = \frac{1}{i},$$

auch

$$\frac{dx}{du} < 0 \qquad \frac{dyi}{du} > 0$$

ist, so hat man

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \qquad \frac{dyi}{du} = +\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}.$$

Es ist also

$$H = \int_{+\infty}^{\frac{1}{k}} \frac{k'^2\,dx}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$H' = \int_{0}^{+\infty} \frac{k'^2\,dy}{(1+y^2)\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}.$$

Die Functionen unter dem Integrale wechseln nie ihr Zeichen, und die Variabele läuft durch keinen Verzweigungspunkt, es sind also $H$ und $H'$ positiv. Um $H'$ auf die Integralgrenzen von $H$ zu transformieren, hat man nach dem Obigen die Substitution

$$k^2y^2 = k'^2x^2 - 1$$

anzuwenden, in der stets

$$k'x = +\sqrt{1+k^2y^2}$$

sein mag, so dass $x$ mit $y$ wächst, dann ist

$$k^2y\,dy = k'^2x\,dx$$

$$ky = +\sqrt{k'^2x^2-1} \quad (\text{denn } y > 0)$$

$$k^2(1+y^2) = k'^2(x^2-1)$$

$$1+k^2y^2 = k'^2x^2,$$

also folgt in vollkommenster Analogie

$$52)\qquad H = \int_{+\infty}^{\frac{1}{k}} \frac{k'^2\,dx}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$H' = \int_{+\infty}^{\frac{1}{k}} \frac{k^2dx}{(1-x^2)(\sqrt{(1-x^2)\,(1-k'^2x^2)}}$$

Eine Vertauschung von $K$ und $K'$ wird also eine Vertauschung von $H$ und $H'$ zur Folge haben.

Aus den Beziehungen

$$\frac{H_1'(u-2K)}{H_1(u-2K)} = \frac{H'_1u}{H_1u}$$

$$\frac{H_1'(u+2K'i)}{H_1(u+2K'i)} = \frac{H_1'u}{H_1u} - \frac{\pi i}{K}$$

folgen sofort die Fundamentalgleichungen der Function $\Omega u$:

$$53)\qquad \begin{aligned} \Omega(u-2K) &= \Omega u + 2H \\ \Omega(u+2Ki') &= \Omega u + 2H'i. \end{aligned}$$

Bei Aenderung des Arguments um $-2K$ und $+2Ki$ vermehrt sich also $\Omega u$ wie jede elliptische Function zweiter Gattung um gewisse positive Constanten $2H$ und $2H'i$.

Hieraus folgt

$$\Omega(-2K) = 2H \quad \Omega(2Ki') = 2H'i$$
$$\Omega(-2K+2K'i) = 2H+2H'i;$$

demnach ist auch

$$\Omega(-mK+m'K'i) = mH+m'H'i,$$

wo $m$ und $m'$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeuten.

Die letzte Formel ist nur ein specieller Fall des Ad-

ditionstheorems für $\Omega u$, das sich entweder selbständig oder aus dem für $Zu$:

$$Z(u+a)-Zu-Za=k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+a) \text{ [1]}$$

leicht herleiten lässt. Setzt man nämlich

$$a=K+K'i,$$

so folgt

$$\Omega u = Zu - k^2 u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, \text{ [2]}$$

und hieraus leitet man ab

$$\Omega(u+a)-\Omega u-\Omega a=k'^2 \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}\cdot\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a}\cdot\frac{\operatorname{sn}(u+a)}{\operatorname{cn}(u+a)}.$$

Da nach Gudermann

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+k'}} \quad \operatorname{cn}\frac{K}{2}=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}} \quad \operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'};$$

so kann man z. B., wenn

$$u=a=\frac{K}{2}$$

gesetzt wird, schliessen, dass

$$2\Omega\frac{K}{2}=1+k'+H.$$

Zur Entwickelung von $\Omega u$ in eine Fourier'sche Reihe differentieren wir logarithmisch

$$H_1 u = 2cq^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K}\prod_1^\infty \nu\left(1+2q^{2\nu}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{4\nu}\right)$$

und wenden die Formel an

---

1) Jacobi fund. nova § 53, 3). Ges. W. Bd. I p. 205. Hermite, Ueb. d. ell. F. üb. v. Natani p. 78.

2) Dieselbe Beziehung erhält man auch unmittelbar durch logarithmische Differentiation der Gleichung

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H_1 u}{\Theta u}.$$

$$\tfrac{1}{2}\lg(1+2r\cos\alpha+r^2) = r\cos\alpha - \frac{r^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{r^3}{3}\cos 3\alpha - \ldots,$$

wodurch wir schliesslich erhalten:

$$\Omega u = \omega u + \frac{\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K} - \frac{2\pi}{K}\sum_1^\infty m\,\frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}}\sin\frac{m\pi u}{K}.$$

Die Formeln für $\Omega v$ sind ganz analog. Schreiben wir

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}} \qquad q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$
$$\Theta(u, q) = \Theta u \quad \Theta(v, q') = \Theta v \quad \text{u. s. w.},$$

dann ist die Fläche dargestellt durch die Gleichungen:

54)
$$\begin{aligned} x &= a\,\frac{Hu}{H_1 u}\cdot\frac{\Theta_1 v}{H_1 v} \\ y &= b\,\frac{\Theta_1 u}{H_1 u}\cdot\frac{Hv}{H_1 v} \\ 2z &= (a+b)\left(\frac{H^2 u}{H_1^2 u} - \frac{H^2 v}{H_1^2 v}\right); \end{aligned}$$

und die Formeln für $\Omega v$ erhält man durch Vertauschung der Grössen $u$ und $v$, $K$ und $K'$, $k$ und $k'$, $q$ und $q'$, $H$ und $H'$. Also wird

$$\Omega v = \omega' v - \frac{H_1' v}{H_1 v}, \quad \text{wo} \quad \omega' = \frac{\Theta_1''(0, q')}{\Theta_1(0, q')},$$

oder

$$\Omega v = A' v + B' v^3 + C' v^5 + \ldots,$$

wo die Coefffcienten $A'$, $B'$, $C'$ ... aus den $A$, $B$, $C$ ... durch Vertauschung von $K$ und $K'$ hervorgehen. Desgleichen ist

$$\Omega v = Zv - k'^2 v + \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v} \quad \text{u. s. w.}$$

§ 5.

## Specielle Fälle.

Die conformen Abbildungen sind gegeben durch die Gleichung:

$$\xi + \eta i = f(\Omega u \pm i \Omega v).$$

Setzen wir speciell

$$f(z) = cz,$$

wo $c$ eine reelle Constante, so wird

$$\xi = c\,\Omega u \quad \eta = \pm c\,\Omega v.$$

Der Vergrösserungsmassstab der Abbildung ist

$$\frac{c}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{kk'}} \cdot \frac{H_1 u\, H_1 v}{\sqrt{H_1{}^2 u \,.\, \Theta^2 v + \Theta^2 u\, H_1{}^2 v}}.$$

Die eine Schaar der Krümmungslinien $u =$ const bildet sich also ab als zur $y$-Achse parallele Gerade, die andere als zur $x$-Achse parallele Gerade.

Für $u = 0$ ist $x = 0$ und $\xi = 0$, desgleichen
„ $v = 0$ „ $y = 0$ „ $\eta = 0$;

d. h. die durch die $yz$-Ebene herausgeschnittene negativ liegende Parabel bildet sich als $\eta$-Achse, die durch die $xz$-Ebene herausgeschnittene positiv liegende Parabel als $\xi$-Achse der Projectionsebene ab. Der Scheitel des Paraboloids wird mithin zum Coordinatenanfangspunkt in der Ebene. Für $u = \pm K$ erhält man die eine Gerade der unendlich fernen Tangentialebene, für $v = \pm K'$ die andere; beiden werden in der Ebene zwei Gerade $\xi = \infty$ und $\eta = \infty$ entsprechen, welche mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen. Dieser Umstand, dass die unendlich fernen Elemente sich wieder als unendlich fern abbilden, ermöglicht eine äusserst genaue Abbildung.

Andere Abbildungen zu betrachten, wäre unnütz, da dies ja nur hiesse, eine Ebene auf die andere conform abbilden. Ich will daher zum Schluss nur noch den Fall des gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids kurz erörtern. Dieses hat die Eigenschaft, dass alle zur $z$-Achse senkrechten Schnitte gleichseitige Hyperbeln darstellen und dass demgemäss das Linienpaar in der $xy$-Ebene orthogonal ist. Dieses orthogonale

Linienpaar seinerseits ist dadurch ausgezeichnet, dass durch jeden seiner Punkte eine Erzeugende orthogonal hindurchgeht.

Um die Formeln für das gleichseitig - hyperbolische Paraboloid

$$x^2 - y^2 = 2az$$

zu erhalten, hat man zu setzen

$$a = b \quad k = k' \quad K = K' \quad q = q' \quad H = H' \quad \omega = \omega',$$

dann wird

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad q = e^{-\pi} = 0{,}043214 \ldots$$

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \ldots\right],$$

und die Beziehung 51) wird dann übergehen in:

$$KH = \frac{\pi}{4}, \quad \text{sodass} \quad \omega = -\frac{\pi}{4K^2}.$$ [1]

Es ist also

$$\Omega\left(u, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\pi u}{4K^2} - \frac{H_1'(u, e^{-\pi})}{H_1(u, e^{-\pi})}$$

$$\Omega\left(v, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\pi v}{4K^2} - \frac{H_1'(v, e^{-\pi})}{H_1(v, e^{-\pi})}.$$

Die Gleichung des orthogonalnn Linienpaars $x^2 - y^2 = 0 \quad z = 0$ ist, wie man aus 44) oder 54) leicht findet, in den parabolischen Coordinaten $u$ und $v$:

$$u^2 - v^2 = 0.$$

Die entsprechende Figur in der Ebene ist

$$\xi^2 - \eta^2 = 0.$$

Jenes Linienpaar bildet sich also wieder als ein Linienpaar ab[2], das die Achsenwinkel halbiert, und es

1) Die Art und Weise, wie $\omega$ hergeleitet ist, erscheint recht bemerkenswert. Ohne Einführung der Grössen $H$ und $H'$ hätte man diesen einfachen Ausdruck wohl kaum erhalten können.

2) Bei der allgemeinen Fläche bildet sich, wie man zeigen kann, das durch den Scheitel gehende Paar von Erzeugenden nicht als Geradenpaar in der Ebene ab.

lässt sich zeigen, dass es das einzige Paar von Erzeugenden ist, welches die Eigenschaft hat, sich wieder als gerade Linien abzubilden. Da bei der conformen Abbildung gemäss ihrer Definition alle Winkel beibehalten werden, so wird dieses Linienpaar

$$\xi^2 - \eta^2 = 0$$

von den Bildern aller andern Erzeugenden des gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids orthogonal geschnitten, und man kann sich daher leicht eine Vorstellung von dem Verlauf derselben machen.

# Lebenslauf.

Verfasser, Walter Immanuel Koch, geb. am 18. August 1864 zu Lauenburg in Pommern, evangelischer Confession, absolvierte zuerst das Progymnasium seiner Vaterstadt und dann die Prima des Kgl. Gymnasiums zu Neustadt in Westpreussen, woselbst er zu Ostern 1882 das Maturitätszeugnis erlangte.

Um sich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen, besuchte er vom Anfang des Sommersemesters 1882 bis zum Schlusse des Sommersemesters 1886 nach einander die Universitäten Berlin, Breslau, wiederum Berlin und Greifswald, an welchem letzteren Orte er am 10. und 11. Juni 1887 die Prüfung pro facultate docendi bestand.

Seit Ostern 1887 ist er am Progymnasium zu Lauenburg in Pommern als Probekandidat beschäftigt.

Während seiner Studienzeit besuchte er die Vorlesungen resp. Uebungen oder Seminarien folgender Herren Professoren und Docenten:

In Berlin: du Bois-Reymond, Eichler, Fuchs, v. Helmholtz, G. Kirchhoff, Knoblauch, Kummer, Netto, Paulsen, Runge, v. Treitschke, Wangerin und Weierstrass.

In Breslau: Ferd. Cohn, Galle, Körber, Löwig, Rosanes, Schröter, Staude und Weber.

In Greifswald: Minnigerode, Oberbeck, Schmitz und Schuppe.

Allen diesen seinen hochverehrten Lehrern spricht der Verfasser an dieser Stelle seinen wärmsten Dank aus.

# Thesen.

I.

Die elliptischen Integrale zweiter Gattung sind in den meisten Lehrbüchern nicht allgemein und nicht ausführlich genug behandelt; die Eigenschaften derselben müssen aus den Eigenschaften der allgemeinen Function $\frac{d \lg \vartheta(u)}{du}$ hergeleitet werden.

II.

Die elliptischen Functionen sind nicht durch die Integralrechnung zu definieren, sondern etwa durch die Eigenschaft derselben, dass ihr Additionstheorem algebraisch ist, und die $\vartheta$-Functionen sind vor den elliptischen zu behandeln.

III.

Der physikalische Unterricht auf den höheren Lehranstalten darf einem Nicht-Mathematiker nicht übertragen werden.

IV.

Der Wert einer mathematischen Disciplin ist nicht nach ihrer Anwendbarkeit auf empirische Wissenschaften zu bemessen.